

以邊界元素法探討異向性大理岩之裂縫傳播路徑

柯建仲¹ 許世孟² 陳昭旭³ 冀樹勇⁴

¹ 中興工程顧問社大地工程研究中心研究員

² 中興工程顧問社大地工程研究中心組長兼研究員

³ 國立成功大學資源工程系副教授

⁴ 中興工程顧問社大地工程研究中心經理

摘 要

在真實大地環境中，岩體含有許多不連續面，如：裂縫、節理、劈理、層面及斷層等等。岩體的變形與破壞與地質不連續面的存在相當有關。在含有裂縫的材料中，裂縫尖端的應力強度因子為控制裂縫開始開裂及傳播的主要參數，與材料強度有關，而應力強度因子之大小與裂縫傾角、裂縫長度及材料異向性程度有關。本文主要是利用邊界元素法來探討異向性大理岩的裂縫傳播行為，包含應力強度因子與裂縫傾角及材料異向性的關係及裂縫初始開裂角度與裂縫傳播路徑之預測及模擬。

在本文中，將邊界元素法結合最大周圍應力破壞準則來預測異向性材料之裂縫初始開裂角度及模擬異向性材料之裂縫傳播路徑，並將數值分析結果與前人在初始開裂角度之結果及本研究之試驗所觀察之傳播路徑結果進行比較。研究結果發現，數值分析結果與試驗結果均相當接近及吻合。因此，代表本研究所提出之裂縫傳播模式可準確的分析等向性及異向性材料之裂縫傳播行為。

關鍵字：應力強度因子、異向性、邊界元素法、裂縫傳播行為。

Boundary Element Analysis of Crack Propagation Path on Anisotropic Marble

ABSTRACT

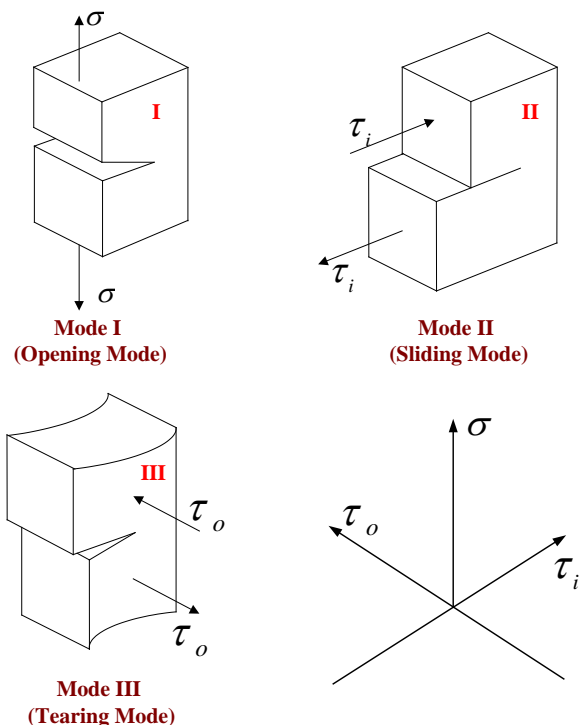
Rock masses in nature contain numerous discontinuities as cracks, joints, cleavages, beddings and/or even faults etc. Deformation and failure of a rock mass are greatly dependent on the presence of such geological discontinuities. In such a case, the stress intensity factors (SIFs) of crack tips, which govern the crack propagation are associated with material properties, and are strongly affected by the mechanical interaction between cracks. This paper presents the development of a unified numerical framework based on the boundary element method (BEM) for modelling crack propagation behaviour in anisotropic marble. The BEM formulation combined with the maximum circumferential stress criterion was used to predict the crack initiation angles and to simulate the crack propagation paths. To demonstrate the proposed BEM procedure to predict crack propagation in anisotropic marble, the propagation path in CSTBD specimen was numerically predicted and compared with the actual laboratory observations. Good agreement was found between the two approaches. It is therefore concluded that the proposed BEM procedure can accurately simulate the process of crack propagation for anisotropic marble.

Key Words: Stress intensity factors, boundary element method, crack propagation behavior, anisotropic marble.

一、前言

岩石破壞力學基本上是建立在 Griffith 定理和 Irwin 修正後的理論，Griffith[1]認為在裂縫尖端附近的應力場是控制裂縫行為之重要因素，Irwin[2]在定

理中引進一項參數，稱為應力強度因子(Stress Intensity Factors, SIF's)，用以表示裂縫尖端附近的應力場及位移場。一般來說，針對三維之應力模態，我們可引進三個應力強度因子，稱做 K_I ， K_{II} ，和 K_{III} ，以符合三維空間中的破壞模態，如模態 I(開裂模態)，模態 II(滑裂模態)及模態 III(撕裂模態)，其說明如圖一所示。在一般混合模態狀況下，裂縫行為都是用以上三種模態相互組合來描述。當一個具有初始裂縫的物體，在外力作用下，其相對應之應力強度因子可求得，且在裂縫尖端附近的應力和位移亦可同時用他們表示出。因此，在處理線彈性破壞力學之問題時，將簡化為求取裂縫尖端之應力強度因子。而由應力強度因子僅可推求出裂縫尖端附近的應力場及臨界的應力值，並無法瞭解裂縫開裂的初始破壞角度及傳播後的力學行為。為了更深入瞭解岩石整個受力破壞的過程，本文將探討具有裂縫的異向性岩石材料，其開裂初始角度及裂縫延伸後的相關力學行為。



圖一 裂縫的三種基本模態

在 2-D 的裂縫問題中，裂縫尖端之應力強度因子是相當重要的參數，並且與裂縫傳播之破壞準則具有直接的相關性。而如何求取裂縫尖端之奇異應力場對於數值方法而言，是相當大的挑戰。近年來，邊界元素法常被用來處理岩石破壞力學相關問題，也曾用來模擬裂縫傳播的力學行為，他可以克服有限元素法需重新作網格劃分之缺點。然而，因裂縫表面的幾何形狀，在數學上屬於奇異系統，故此問題的解無法直接由邊界元素法公式求得，需從各種數值技術尋求解決之道，而一般常用的數值技術如：Green's 函數法(Snyder & Cruse, 1975)[3]、半區間法(Blandford et al.,

1981[4]；Sollero et al., 1994[5]；Sollero & Aliabadi, 1995[6])及位移不連續法(Displacement Discontinuity Method, DDM)(Crouch & Starfield, 1983[7]；Shen & Stephansson, 1994[8]；Scavia, 1995[9])。其中，Green's 函數法具有避開裂縫表面奇異性的優點，並且其預測結果具有高度的精確性，但此法的適用範圍僅限於簡單的裂縫幾何形狀。半區間法則是將整個區域劃分出數個單一區間，並在各個區間引進人為劃分的邊界，因此其結果為一巨型的方程式系統。在裂縫傳播分析中，這些人為邊界必須能夠重複被引用在裂縫延伸的過程，故此法並不容易將裂縫延伸的過程執行成自動計算的步驟(Portela et al.,1993)[10]。而位移不連續法主要的缺點是：此法中的核函數會比邊界元素法之傳統位移積分方程式含有更高階的奇異性，因此，這個方法並不適用於含有有限區間的情況。

在本文中，是採用邊界元素法(Boundary Element Method, BEM)並配合最大周圍應力破壞準則，來預測異向性大理岩裂縫開裂的初始角度及裂縫傳播的路徑。在邊界元素法的公式中，位移積分方程式僅運用於外部邊界；曳引力積分方程式僅運用於裂縫單邊，此種方法可以消除傳統數值方法重複劃分網格的缺點。另外，利用邊界元素法所計算的應力強度因子發現，均與前人研究成果相當接近，顯示此套過程對處理裂縫尖端應力場問題之可靠性，因此，本文更進一步地，將此過程擴展至模擬裂縫之開裂與傳播，並配合異向性岩石相關試驗，觀察與計算實際裂縫之開裂角度與傳播過程，用以印證數值模擬過程之適用性。本文之目的：(1)利用異向性岩石在混合模態載重下的應力強度因子，採用邊界元素法來預測裂縫開裂之初始角度，並與實際異向性岩石試驗觀察結果。(2)根據目的(1)所得之結果，模擬裂縫延伸後傳播的路徑，並與試驗結果互相驗證。

二、理論基礎

2.1 異向性彈性理論

考慮一線彈性、均質與橫向等向性薄板，定義總體座標系統為卡式座標(x-y)，區域座標系統為 $x'-y'$ ，其中， x' 軸為垂直橫向等向性平面， y' 軸則是位於橫向等向性平面。層面傾角 ψ 定義為橫向等向性平面與 x' 軸間的夾角。假設平板很薄，可忽略材料受力後厚度方向之應力變化，故採用廣義平面應力假設推導異向性材料組成律(Lekhnitskii, 1963)[11]。在 $x-y$ 座標系統下的平面材料組成律可用下式表示：

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

其中， a_{11} ， a_{12} ，...， a_{16} 為在 $x-y$ 座標系統下計算之柔度分量。這些分量與材料彈性參數有關。透過座標轉換，將這些分量轉換成 $x'-y'$ 座標系統上彈性參數與層面傾角 ψ 的關係，如(2)式所示(Amadei, 1983)[12]

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{\sin^4 \psi}{E'} + \frac{\cos^4 \psi}{E} + \sin^2 \psi \cos^2 \psi \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) \\
 a_{12} &= \left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E} - \frac{1}{G'} \right) \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{\cos^4 \psi}{E'} \nu' - \frac{\sin^4 \psi}{E'} \nu' \\
 a_{16} &= \left[2 \left(\frac{\cos^2 \psi}{E} - \frac{\sin^2 \psi}{E'} \right) + \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \right] (-\sin \psi \cos \psi) \\
 a_{22} &= \frac{\cos^4 \psi}{E'} + \frac{\sin^4 \psi}{E} + \sin^2 \psi \cos^2 \psi \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) \\
 a_{26} &= \left[2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{E} - \frac{\cos^2 \psi}{E'} \right) - \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \right] (-\sin \psi \cos \psi) \\
 a_{66} &= \left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E} + \frac{2\nu'}{E'} \right) \cdot 4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \frac{1}{G'} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi)^2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

其中， E 和 E' 分別為橫向等向性平面與垂直該平面之楊氏係數； ν 和 ν' 分別為作用力平行與垂直橫向等向性平面產生之側向應變與軸向應變之比； G' 為垂直橫向等向性平面之剪力模數，而橫向等向性平面上之剪力模數為 $E/2(1+\nu)$ 。

令 F 為應力函數，則應力分量可表示如下：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \tag{3}$$

將式(1)與(3)帶入諧和方程式，則 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 必須滿足下列的微分方程式。

$$\begin{aligned}
 a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - \\
 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

而此方程式的通解 $\mu_i (i = 1 \text{ to } 4)$ 為特徵方程式的根。

$$a_{11}\mu^4 - 2a_{16}\mu^3 + (2a_{12} + a_{66})\mu^2 - 2a_{26}\mu + a_{22} = 0. \tag{5}$$

Lekhnitskii (1963)[11]指出，應力函數 F 的一階導數可用下列式子表示：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial x} &= 2 \operatorname{Re} [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \\
 \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)],
 \end{aligned} \tag{6}$$

其中， Re 定義為複數的實部， $\phi_k(z_k) (k = 1, 2)$ 為複變數 $z_k = x + \mu_k y$ 的解析函數。

聯立(3)式與(6)式，可獲得應力分量的通用式。

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= 2 \operatorname{Re} [\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\
 \sigma_y &= 2 \operatorname{Re} [\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\
 \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)],
 \end{aligned} \tag{7}$$

其中， $\phi_k'(z_k)$ 為 $\phi_k(z_k)$ 對 z_k 的一階導數。將(7)式帶入組成律與諧和方程式，可獲得 x 與 y 方向的位移分量(Sih et al., 1965[13])。

$$\begin{aligned}
 u &= 2 \operatorname{Re} [P_{11} \phi_1(z_1) + P_{12} \phi_2(z_2)] \\
 v &= 2 \operatorname{Re} [P_{21} \phi_1(z_1) + P_{22} \phi_2(z_2)]
 \end{aligned} \tag{8}$$

其中，

$$\begin{aligned}
 P_{1k} &= a_{11} \mu_k^2 + a_{21} - a_{16} \mu_k \\
 P_{2k} &= a_{12} \mu_k + a_{22} / \mu_k - a_{26} (k = 1, 2).
 \end{aligned} \tag{9}$$

而(7)式與(8)式分別為橫向等向性薄板之應力場與位移場。

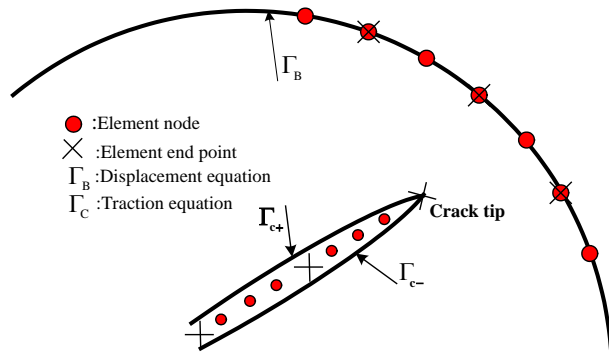
2.2 邊界積分方程

對一個具有裂縫的彈性物體，傳統的線彈性位移邊界積分方程式並不足以解出所有沿著問題的外部邊界及裂縫面兩邊的未知數，是因為裂縫面具有幾何形狀的奇異性。在 Chen et al.(1998)[14]的邊界元素法公式中，對於具有裂縫的異向性材料，位移積分方程式僅使用於外部邊界，而曳引力積分方程式只能使用在裂縫的單邊。這位移積分方程式應用在外部邊界的結果，如下所示： $(z_{k,B}^0 \in \Gamma_B)$ (如圖二)

$$\begin{aligned}
 & C_{ij}(z_{k,B}^0)u_j(z_{k,B}^0) + \int_{\Gamma_B} T_{ij}(z_{k,B}, z_{k,B}^0)u_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) \\
 & + \int_{\Gamma_C} T_{ij}(z_{k,C}, z_{k,B}^0)[u_j(z_{k,C+}) - u_j(z_{k,C-})]d\Gamma(z_{k,C}) \quad (10) \\
 & = \int_{\Gamma_B} U_{ij}(z_{k,B}, z_{k,B}^0)t_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B})
 \end{aligned}$$

其中 Γ_C 與 Γ_{C+} 具有相同方向的向外法線向量，而標 B 及 C 分別代表外部邊界及裂縫面邊界。曳引力積分方程式應用在裂縫面的單邊 ($z_{k,C}^0 \in \Gamma_{C+}$) 如下所示：

$$\begin{aligned}
 & 0.5t_j(z_{k,C}^0) + n_m(z_{k,C}^0) \int_{\Gamma_B} C_{lmik} T_{ij,k}(z_{k,C}, z_{k,B})u_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) \\
 & + n_m(z_{k,C}^0) \int_{\Gamma_C} C_{lmik} T_{ij,k}(z_{k,C}, z_{k,C})[u_j(z_{k,C+}) - u_j(z_{k,C-})]d\Gamma(z_{k,C}) \\
 & = n_m(z_{k,C}^0) \int_{\Gamma_B} C_{lmik} U_{ij,k} \times (z_{k,C}, z_{k,B})t_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) \quad (11)
 \end{aligned}$$



圖二 二維裂縫之幾何形狀

利用(10)式及(11)式可解出在外圍邊界上的未知位移及曳引力，而且在裂縫面上未知的裂縫相對位移亦可求出。

2.3 應力強度因子計算

針對混合模態載重下，裂縫尖端之之應力強度因子，我們可藉由裂縫之相對位移(Relative crack displacement, RCD)以外插法(Extrapolation method)求出。其計算式如(12)：

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^3 \phi_k \Delta u_i^k \quad (12)$$

在距離裂縫尖端 r 時，其裂縫尖端之相對位移 (Δu_1 、 Δu_2) 與應力強度因子 (K_I 、 K_{II}) 之關係如下 (Sollero and Aliabadi, 1993)[15]：

$$\Delta u_1 = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (H_{11}K_I + H_{12}K_{II}) \quad (13)$$

$$\Delta u_2 = 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (H_{21}K_I + H_{22}K_{II})$$

其中， H_{ij} 為與材料彈性參數有關之係數 (Pan, 1997)[16]。由前段邊界元素法所求得之裂縫相對位移代入(12)及(13)式，可得到一組代數方程式，經由此方程式可求出 K_I 及 K_{II} 。利用裂縫尖端的相對位移量，可求出該示意圖的應力強度因子。在本文中並且定義正規化應力強度因子(Normalized SIF's)，如下式：

$$F_I = \frac{K_I}{K_0} \quad ; \quad F_{II} = \frac{K_{II}}{K_0} \quad (14)$$

$$K_0 = \frac{W}{\pi R t} \sqrt{\pi a} \quad (15)$$

2.4 裂縫初始開裂角度與傳播路徑

在破壞力學的領域中，一般常用來預測裂縫初始成長角度的破壞準則有以下三種：(1)最大周圍應力破壞準則 (Maximum tensile stress criterion，又稱 σ -criterion) (Erdogan and Sih, 1963)[17]；(2)最大能量釋放率破壞準則 (Maximum energy release rate criterion，又稱 G-criterion)；(3)最小應變能密度破壞準則 (Minimum strain energy density criterion，又稱 S-criterion)。

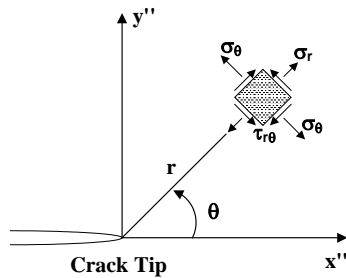
在以上三種破壞準則中， σ -破壞準則所預測的裂縫開裂初始方向與前人在脆性黏土 (Vallejo, 1987)[18] 與化學材料 (Woo and Ling, 1984[19]; Richard, 1984[20]) 之試驗結果較為接近，故本文將此破壞準則運用於混合模態載重下，量測異向性岩石之裂縫開裂之初始角度。

對於異向性材料，一般在裂縫尖端附近的彈性應力場，在局部卡式座標 (x'' , y'') 的表示如圖三，其表示式可以用應力強度因子 K_I 、 K_{II} 來表示，如下：

$$\begin{aligned}
 \sigma_x'' = & \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \\
 & + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (16)
 \end{aligned}$$

$$\sigma_y'' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (17)$$

$$\tau_{x'y''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (18)$$



圖三 裂縫尖端之區域座標系統

利用座標轉換，如圖四，在極座標下裂縫尖端附近的應力場，如下所示：

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_x'' + \sigma_y''}{2} - \frac{\sigma_x'' - \sigma_y''}{2} \cos 2\theta - \tau_{x'y''} \sin 2\theta \quad (19)$$

$$\tau_\theta = -\frac{\sigma_x'' - \sigma_y''}{2} \sin 2\theta + \tau_{x'y''} \cos 2\theta$$

假如我們使用最大周圍應力破壞準則，則裂縫開裂初始角度(θ_0)必須滿足下式：

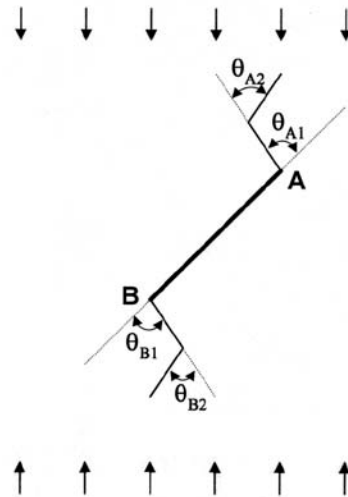
$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{or } \tau_{r\theta} = 0) \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad (20)$$

當材料彈性參數、材料異向程度(ψ)及裂縫幾何性質均為已知值，而 σ_θ 為最大值時，可應用一數值計算過程找出裂縫開裂初始開裂角度(θ_0)。

在本文中，對於在混合模態載重下，具有裂縫之異向性岩石圓盤，其裂縫傳播之模擬過程，為在裂縫尖端處延伸一小段離散的線性元素，並計算該延伸元

素尖端之應力場及位移場，以求出新延伸元素的應力強度因子及開裂的初始角度，重複以上的步驟，直到裂縫延伸至邊界為止。其模擬裂縫傳播詳細的步驟如下：

- (1) 利用本文提出之邊界元素法(BEM)，計算裂縫尖端處的應力強度因子(SIFs)。
- (2) 依據最大張應力破壞準則，量測裂縫初始角度。
- (3) 沿著由步驟(2)所量測出的方向，在裂縫處延伸一段線性元素。
- (4) 經由程式自動產生新的邊界元素法網格。
- (5) 重複上述四個步驟進行計算，直到新的裂縫延伸至外部邊界附近為止。



圖四 裂縫傳播的過程

三、數值分析

3.1 應力強度因子計算驗證

本文主要分析的對象為一半徑為R、厚度為t且中心有一裂縫長為2a的薄形圓盤，承受集中載重W，如圖四所示。其分析過程中，最外圍的邊界及裂縫表面之邊界分別用28個連續及10個不連續元素來模擬，並採用平面應力(Plane stress)假設與忽略其微體力(Body force)。

為比較本文之邊界元素法分析程式之適用性，我們針對等向性及異向性材料進行分析，並與前人所作之結果進行比較，例子一、二分別對應等向性與異向性材料。

例子一：(等向性材料)

我們針對等向性材料，如圖五所示中心具有裂縫之圓形試體承受徑向載重，在無因次裂縫長度 $a/R=0.5$ 情況下，探討裂縫傾角(β)對應力強度因子之影響，並與 Atkinson et al.(1982)[21]以連續分佈擾動定理求得之解析解及 Chen et al.(1998)[14]以邊界元素法結合J-積分技術計算之數值解加以比較，結果如表一所示，發現本文所提之邊界元素法結果與 Atkinson et al.及 Chen et al.研究所得之應力強度因子

相當接近(如表一所示)，因此本程式可適用於分析等向性材料。

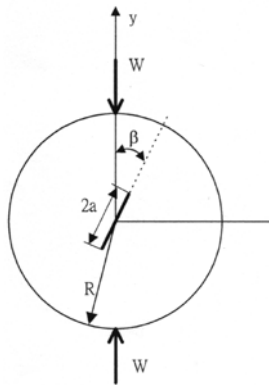
例子二：(異向性材料)

我們以一長寬各為 $2h$ 及 $2w$ 且中心有一裂縫長為 $2a$ 的異向性矩形薄版，承受均佈拉力 σ 為分析對象，如圖六所示，其中， $a/w=0.2$ 及 $h/w=2.0$ ，本文並針對不同的材料異向性層面 ψ 對應力強度因子之影響進行分析，其過程與等向性之過程相同。

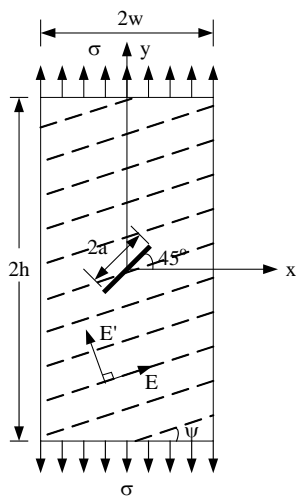
分析對象之幾何形式及基本假設：

1. 裂縫傾角 ($\beta = 45^\circ$)；
 2. 裂縫長度 ($a=0.5$)；
 3. 平面應力(Plane stress)並忽略其微體力(Body force)；
- 彈性參數為 $E = 48.26GPa$ ， $E' = 17.24GPa$ ， $\nu' = 0.29$ ， $G' = 6.89GPa$ 。

由表二可發現，本研究提出之邊界元素法分析程式與前人分析結果極為接近，故本分析程式可應用於分析異向性材料。



圖五 等向性巴西試驗圓盤



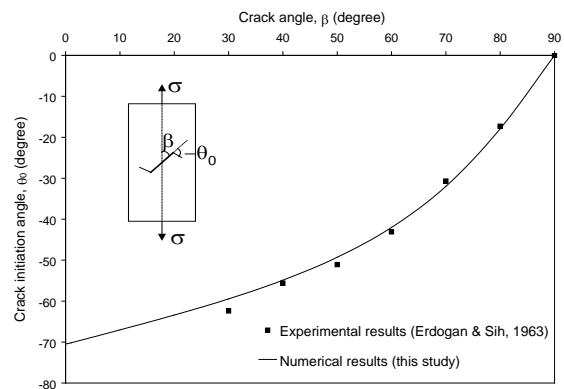
圖六 異向性矩形試體

3.2 裂縫初始開裂角度與傳播路徑之模擬分析

(一) 裂縫開裂初始角度

為驗證本文所提出之邊界元素法模擬程式，用於裂縫開裂初始角度之模擬分析時的適用性，我們根據前人之試驗條件模擬並與其試驗結果進行比較分析，其過程如下所述：

- (1) Erdogan and Sih(1963)[17]以等向性的樹脂玻璃為試驗材料來進行單軸張力試驗，其試體尺寸為 $229 \times 457 \times 4.8$ mm 的薄板，試體中心並有一 50.8 mm 長的裂縫。Erdogan and Sih 並考慮各種不同裂縫傾角 β 下裂縫開裂初始角度之變化，圖七為不同裂縫傾角下，裂縫開裂初始角度之試驗與數值模擬結果，由圖形可發現，數值模擬結果與試驗結果相當吻合。
- (2) Vallejo(1987)[18]以高嶺土作為試驗材料來進行單軸抗壓試驗，其試體尺寸為 $76.2 \times 76.2 \times 25.4$ mm 之岩樣，其中心並具有一 24.9 mm 長之裂縫。Vallejo 亦針對各種不同裂縫傾角來進行試驗，圖八為不同裂縫傾角下，裂縫初始角度之試驗與數值模擬結果，由圖形可發現，結果亦相當吻合。



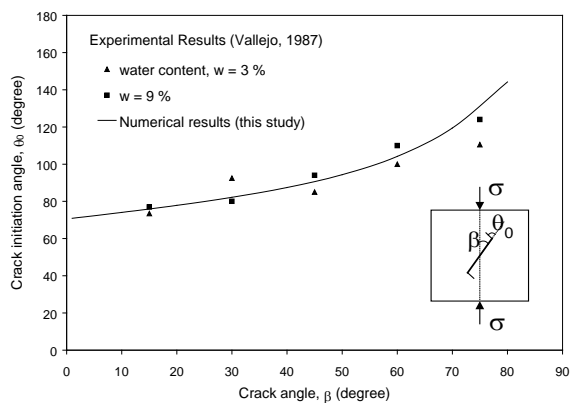
圖七 樹脂玻璃承受單軸張力載重下，裂縫傾角與初始開裂角度之變化關係圖

表一 承受徑向載重的等向性巴西圓盤，正規化應力強度因子與半徑比之關係 ($\beta = 45^\circ$)

a/R	Atkinson et al.(1982)[21]		Chen et al.(1998)[14]		This Study	
	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$
0.1	-1.035	-2.010	-1.020	-1.968	-1.018	-1.965
0.2	-1.139	-2.035	-1.116	-1.995	-1.116	-1.992
0.3	-1.306	-2.069	-1.272	-2.036	-1.277	-2.029
0.4	-1.528	-2.100	-1.484	-2.069	-1.492	-2.065
0.5	-1.784	-2.132	-1.737	-2.103	-1.749	-2.098
0.6	-2.048	-2.200	-2.020	-2.148	-2.039	-2.139
0.7	-	-	-2.337	-2.213	-2.364	-2.224

表二 承受均佈載重的異向性矩形試體，正規化應力強度因子與異向性層面傾角之關係 ($\beta = 45^\circ$, $a/R = 0.5$)

ψ (Deg.)	Gandhi(1972)[22]		Pan(1997)[16]		Chen et al.(1998)[14]		This study	
	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_I/\sigma\sqrt{\pi a}$	$K_{II}/\sigma\sqrt{\pi a}$
0	0.522	0.507	0.5228	0.5076	0.519	0.504	0.524	0.514
45	0.515	0.505	0.5153	0.5048	0.516	0.505	0.518	0.513
90	0.513	0.509	0.5133	0.5090	0.537	0.532	0.533	0.527
105	0.517	0.510	0.5165	0.5107	0.507	0.502	0.540	0.528
120	0.524	0.512	0.5240	0.5117	0.520	0.508	0.541	0.526
135	0.532	0.511	0.5316	0.5111	0.532	0.511	0.536	0.522
180	0.522	0.507	0.5228	0.5076	0.519	0.504	0.524	0.514



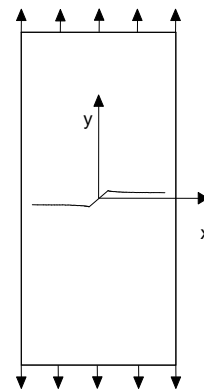
圖八 高嶺土承受單軸壓力載重下，裂縫傾角與初始開裂角度之變化關係圖

(二) 傳播路徑

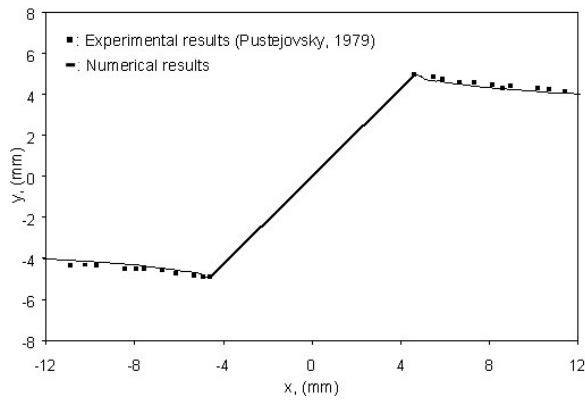
這部分我們將針對前人在等向性與異向性材料之試驗結果進行探討，並觀察其實際裂縫傳播路徑，用以驗證本程式之模擬結果。

首先為 Pustejovsky(1979)[23] 進行一系列的單軸張力試驗來探討等向性鈦薄版的裂縫問題，其試體的材料彈性參數為 $E = 112GPa$ 、 $\nu = 0.29$ ，極限張力強度為 $T_u = 945MPa$ ，試體的尺寸為 $76.2 \times 203.2 \times 3.2$ mm 且中心具有一 13.5 mm 長之裂縫。本文以一裂縫傾角 $\beta = 43^\circ$ 的岩樣作為模擬分析比較的對象，其分析過程是採用 32 個連續與 10 個不連續二次元素來模

擬岩樣之外部邊界與裂縫表面，其數值模擬結果如圖九所示。由圖形可發現，當傳播路徑愈靠近邊界時，有愈垂直於載重方向的趨勢，這個結果與 Yan and Nguyen-Dang(1995)[24]利用雙邊界元素法(Dual BEM)模擬的結果有相同趨勢，且由圖十可發現，本研究數值模擬之結果與 Pustejovsky 之試驗結果相當吻合，表示本文所提出之程式可成功的模擬等向性材料之裂縫傳播路徑。

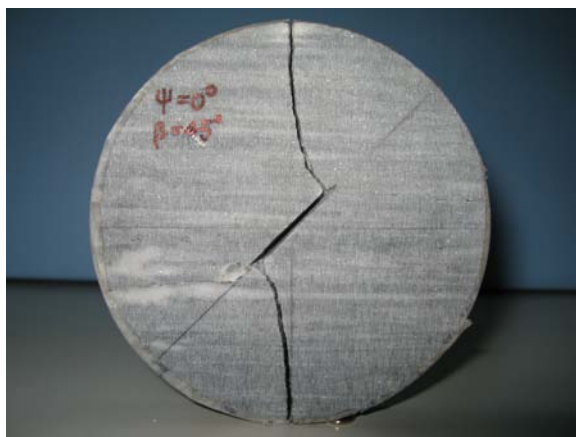


圖九 鈦薄版承受單軸張力載重下，裂縫傳播路徑之模擬 ($\beta = 43^\circ$)

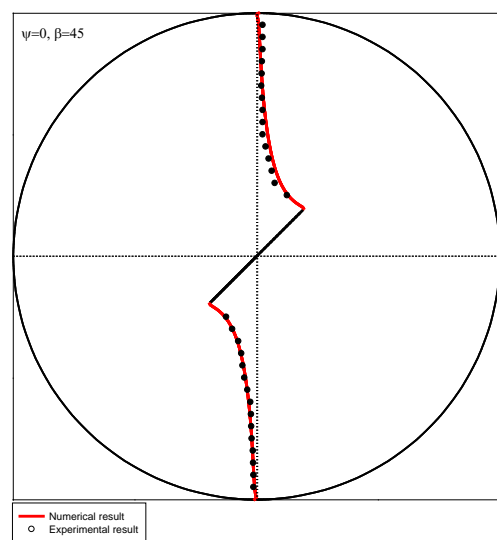


圖十 鈦薄版中心裂縫尖端附近之試驗觀測值與數值模擬結果比較圖

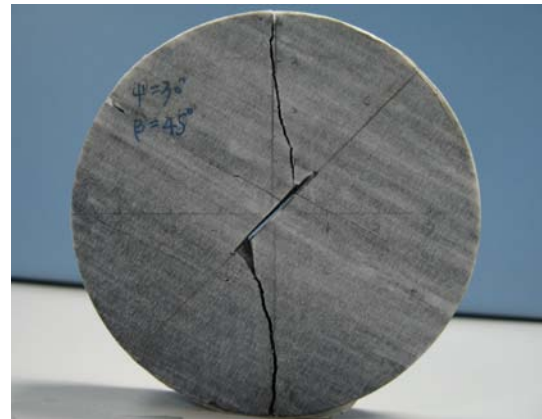
但由於以上試驗結果均只是針對等向性材料進行探討，為驗證本程式模擬異向性材料之裂縫傳播路徑的適用性，我們以花蓮地區之大理岩(Marble)進行巴西試驗所得之試驗結果來進行模擬比較。本文是以大理岩作為製作異向性巴西試驗圓盤(CSTBD)之材料，其試體直徑約為 7.4 cm，厚度約為 1 cm 且中心具有一 2.2 cm 長之裂縫，而異向性大理岩之五個材料彈性參數為 $E = 78.302GPa$ 、 $E' = 67.681GPa$ 、 $\nu = 0.267$ 、 $\nu' = 0.185$ 、 $G = 30.735GPa$ 與 $G' = 25.336GPa$ 。本文是以異向性層面傾角 $\psi = 45^\circ$ 其中兩組岩樣 B-1 及 B-2 之幾何特性來模擬傳播路徑並與其試驗結果比較，兩組岩樣之裂縫傾角分別為 $\beta = 0^\circ$ 與 30° ，如圖十一及十二所示，由試驗結果可觀察出，所有岩樣之裂縫傳播的方向均會平行於載重作用方向且很接近載重作用點。接著，本文採用邊界元素法來分析，我們分別於圓盤外部邊界及裂縫表面設定 32 個連續及 30 個不連續元素來模擬，圖十三及十四分別為 B-1 及 B-2 之數值模擬與試驗結果，由結果可發現，兩種方法之傳播路徑相當吻合。因此本文所提出之邊界元素法模擬程式可同時適用於分析等向性與異向性材料之裂縫初始角度與傳播路徑。



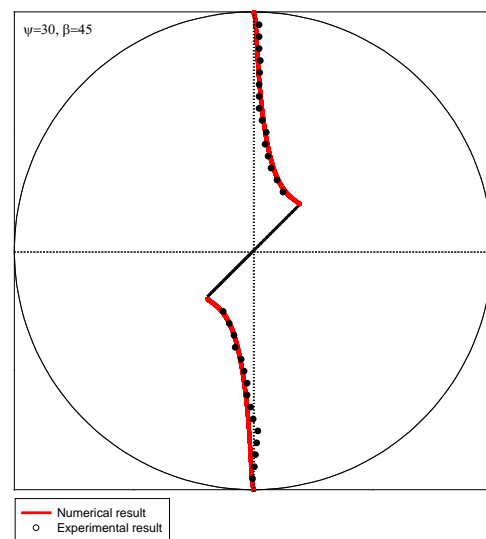
圖十一 B-1 破壞後之照片 ($\psi = 0^\circ, \beta = 45^\circ$)



圖十二 承受徑向載重之大理岩圓盤試體(B-1)，中心裂縫之傳播路徑圖(試驗結果與數值模擬結果之比較圖)



圖十三 B-2 破壞後之照片 ($\psi = 30^\circ, \beta = 45^\circ$)



圖十四 承受徑向載重之大理岩圓盤試體(B-2)，中心裂縫之傳播路徑圖(試驗結果與數值模擬結果之比較圖)

四、結論

本文提出一套邊界元素法模擬程式並結合最大周圍應力破壞準則，可順利的預測出異向性岩石在混合模態載重下，裂縫初始開裂角度與裂縫傳播的路徑，且與前人針對等向性材料進行之試驗結果相當吻合。另外，本文亦提出利用巴西試驗圓盤試體(CSTBD)進行試驗，由試驗結果發現裂縫傳播之路徑會沿著載重方向延伸至載重點，利用本文提出之邊界元素分析模式亦可模擬出相同趨勢的路徑，且兩者間的結果相當吻合。因此本文提出之數值模式結合試驗方法可有系統性的量測與闡述裂縫尖端的破壞力學特性。

參考文獻

- [1] Griffith, A.A., "The theory of rupture," *Proceedings of the 1st International Congress of Applied Mechanics*, Delft, pp. 55-63 (1924).
- [2] Irwin, G.R., "Analysis of stresses and strains near the end of a crack," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 24, pp. 361-364 (1957).
- [3] Snyder, M.D., and Cruse, T.A., "Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates," *International Journal of Fracture*, Vol. 11, pp. 315-328 (1975).
- [4] Blandford, G.E., Ingraffea, A.R., and Liggett, J.A., "Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, pp. 387-404 (1981).
- [5] Sollero, P., Aliabadi, M.H., and Rooke, D.P., "Anisotropic analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element method," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 49, pp. 213-224 (1994).
- [6] Sollero, P., and Aliabadi, M.H., "Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method," *Composite Structures*, Vol. 31, pp. 229-233 (1995).
- [7] Crouch, S.L., and Starfield, A.M., *Boundary Element Methods in Solid Mechanics*. George Allen and Unwin Publishers, London (1983).
- [8] Shen, B., and Stephansson, O., "Modification the G-criterion for crack propagation subjected to compression," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 47, No. 2, pp. 177-189 (1994).
- [9] Scavia, C., "A method for the study of crack propagation in rock structures," *Geotechnique*, Vol. 45, No. 3, pp. 447-463 (1995).
- [10] Portela, A., Aliabadi, M.H., and Rooke, D.P., "Dual Boundary Element incremental Analysis of Crack Growth," *Composite Structures*, Vol. 46, No. 2, pp. 237-284 (1993).
- [11] Lekhnitskii, S.G., *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, translated by Fern, P., Holden-Day Inc., San Francisco (1963).
- [12] Amadei, B., *Rock Anisotropy and the Theory of Stress Measurements*. Springer-Verlag, New York (1983).
- [13] Sih, G.C., Paris, P.C., and Irwin, G.R., "On cracks in rectilinearly anisotropic bodies," *International Journal of Fracture*, Vol. 3, pp. 189-203 (1965).
- [14] Chen, C.S., Pan, E., and Amadei, B., "Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method," *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Vol. 35, No. 2, pp. 195-218 (1998).
- [15] Sollero, P., and Aliabadi, M.H., "Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method," *International Journal of Fracture*, Vol. 64, pp. 269-284 (1993).
- [16] Pan, E., "A general boundary element analysis of 2-D linear elastic fracture mechanics," *International Journal of Fracture*, Vol. 88, pp. 41-59 (1997).
- [17] Erdogan, F., and Sih, G.C., "On the crack extension in plates under loading and transverse shear," *Journal of Basic Engineering*, Vol. 85, pp. 519-527 (1963).
- [18] Vallejo, L.E., "The brittle and ductile behavior of a material containing a crack under mixed-mode loading," *Proceedings of the 28th U.S. Symposium on Rock Mechanics*, University of Arizona, Tucson, (1987).
- [19] Woo, C.W., and Ling, L.H., "On angled crack initiation under biaxial loading," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 19, No. 1, pp. 51-59 (1984).
- [20] Richard, H.A., "Examination of brittle fracture criteria for overlapping mode I and mode II loading applied to cracks," *Application of Fracture Mechanics to Materials and Structures*, G.C. Sih et al. (eds.), Martinus Nijhoff Publication, pp. 309-316 (1984).
- [21] Atkinson, C., Smelser, R.E., and Sanchez, J., "Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test," *International Journal of Fracture*, Vol. 18, pp. 279-291 (1982).
- [22] Gandhi, K.R., "Analysis of inclined crack centrally placed in an orthotropic rectangular plate," *Journal of Strain Analysis*, Vol. 7, No. 3, pp. 157-162 (1972).
- [23] Pustejovsky, M.A., "Fatigue crack propagation in titanium under general in-plane loading - I: Experiments," *Engineering Fracture Mech.*, Vol. 11, pp. 9-15 (1979).
- [24] Yan, A.M., Nguyen-Dang, H., "Multiple-cracked fatigue crack growth by BEM," *Computational Mechanics*, Vol. 16, pp. 273-280 (1995).