

基于边界元法各向异性岩石的裂纹传播路径分析

柯建仲¹, 许世孟¹, 陈昭旭², 冀树勇¹

(1. 中兴工程顾问社 岩土工程研究中心, 台湾 台北 110; 2. 成功大学 资源工程系, 台湾 台南 701)

摘要: 利用边界元法来探讨各向异性大理岩的裂纹传播特性, 如应力强度因子与裂纹倾角及材料各向异性的关系、裂纹初始开裂角度与裂纹传播路径的预测及仿真分析。将边界元法结合最大围压断裂准则来预测各向异性材料的裂纹初始开裂角度及模拟各向异性材料的裂纹传播路径, 并将数值分析结果与前人的初始开裂角度及试验所观察的传播路径得到的结果进行比较, 研究结果表明, 数值分析结果与试验结果均较为吻合。因此, 所提出的裂纹传播方式可准确地分析各向同性及各向异性材料的裂纹传播特性。

关键词: 岩石力学; 应力强度因子; 各向异性; 边界元法; 裂纹传播

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000 - 6915(2010)01 - 0034 - 09

BOUNDARY ELEMENT ANALYSIS OF CRACK PROPAGATION PATHS IN ANISOTROPIC ROCK

KE Chienchung¹, HSU Shihmeng¹, CHEN Chaoshi², CHI Shuyeong¹

(1. Geotechnical Engineering Research Center, Sinotech Engineering Consultants, Inc., Taipei, Taiwan 110, China;

2. Department of Resources Engineering, Cheng Kung University, Tainan, Taiwan 701, China)

Abstract: The development of a unified numerical framework based on the boundary element method(BEM) for modeling crack propagation behavior in anisotropic rock is presented. The BEM formulation combined with the maximum circumferential stress criterion is used to predict the crack initiation angles and to simulate the crack propagation paths. To demonstrate the proposed BEM procedure to predict crack propagation in anisotropic rock, the propagation path in cracked straight-through Brazilian disc(CSTBD) specimen is numerically predicted and compared with the actual laboratory observations. Good agreement is found between the two approaches. It is therefore concluded that the proposed BEM procedure can accurately simulate the process of crack propagation for anisotropic rock.

Key words: rock mechanics; stress intensity factors(SIFs); anisotropic; boundary element method(BEM); crack propagation

1 引言

岩石断裂力学基本上是建立在 Griffith 定理和 Irwin 修正后的理论的, A. A. Griffith^[1]认为在裂纹尖端附近的应力场是控制裂纹传播的重要因素。G. R. Irwin^[2]在定理中引入一参数: 应力强度因子(SIFs), 以其表示裂纹尖端附近的应力场及位移场。一般来说, 针对三维应力模态, 可引进 3 个应力强

度因子, 称作 K_I , K_{II} , 和 K_{III} , 以符合三维空间中的断裂模态, 如模式 I(开裂型), 模式 II(滑裂型)及模式 III(撕裂型), 如图 1 所示。在一般混合状态状况下, 裂纹行为都可用以上 3 种模式相互组合来描述。当一个具有初始裂纹的物体在外力作用下, 其相对应的应力强度因子可求得, 且在裂纹尖端附近的应力和位移可同时表示。因此, 在处理线弹性断裂力学的问题时, 将其简化为求取裂纹尖端的应力强度因子。而由应力强度因子仅可推求出裂纹尖端

收稿日期: 2009 - 06 - 12; **修回日期:** 2009 - 10 - 02

作者简介: 柯建仲(1976 -), 男, 博士, 2007 年毕业于成功大学资源工程系, 现任助理研究员, 主要从事岩石力学与岩土工程数值分析方面的研究工作。E-mail: karis.ke@gmail.com

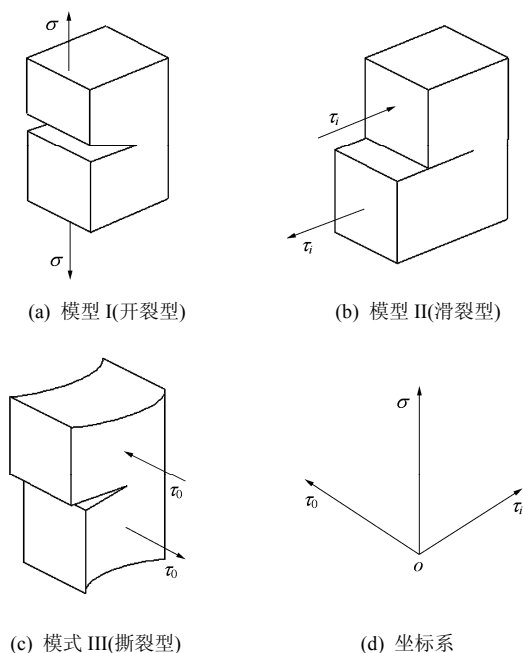


图 1 裂纹的 3 种基本模式
Fig.1 Three basic failure modes of cracks

附近的应力场及临界的应力值, 并无法了解裂纹开裂的初始断裂角度及传播后的力学行为。为了更深入了解岩石整个受力断裂的过程, 本文将探讨具有裂纹的各向异性岩石材料, 其开裂初始角度及裂纹延伸后的相关力学行为。

在二维的裂纹问题中, 裂纹尖端的应力强度因子是相当重要的参数, 并且与裂纹传播的断裂准则具有直接的相关性。而如何求取裂纹尖端的奇异应力场对于数值方法而言, 是相当大的挑战。近年来, 边界元法常被用来处理岩石断裂力学相关问题, 也曾用来模拟裂纹传播的力学行为, 该法可以克服有限元素法需重新作网格划分的缺点。然而, 因裂纹表面的几何形状, 在数学上属于奇异系统, 故此问题的解无法直接由边界元法公式求得, 需从各种数值技术中寻求解决之道, 而一般常用的数值的方法有 Green's 函数法^[3]、半区间法^[4~6]及位移不连续法^[7~9]。其中, Green's 函数法具有避开裂纹表面奇异性的优点, 并且其预测结果具有高度的精确性, 但此法的适用范围仅限于简单的裂纹几何形状。半区间法则是将整个区域划分出数个单一区间, 并在各个区间引入人为划分的边界, 因此其结果为一巨型的方程式系统。在裂纹传播分析中, 这些人为的边界必须能够重复被引用在裂纹延伸的过程, 故此法将裂纹延伸的过程编写成自动计算步骤并不容易^[10]。而位移不连续法主要的缺点是核函数会比边界元法的传统位移积分方程式含有更高阶的奇异性, 因此, 这

个方法并不适用于含有有限区间的情况。

在本文中, 采用边界元法(BEM)并结合最大拉应力断裂准则, 来预测各向异性大理岩裂纹开裂的初始角度及裂纹传播的路径。在边界元法的公式中, 位移积分方程式仅运用于外部边界; 拉力积分方程式仅运用于裂纹单边, 此种方法可以消除传统数值方法重复划分网格的缺点。另外, 利用边界元法计算应力强度因子后发现, 其均与前人研究成果较为接近, 表明此法对处理裂纹尖端应力场问题的可靠性。更进一步地, 本文将此过程扩展至仿真裂纹的开裂与传播, 并配合各向异性岩石相关试验, 观察与并计算实际裂纹的开裂角度与传播过程, 用以印证数值模拟过程的适用性。

本文的目的是: (1) 利用各向异性岩石在混合加载下的应力强度因子, 采用边界元法来预测裂纹开裂的初始角度, 并与实际各向异性岩石试验观察结果相比较。(2) 根据所得的结果, 模拟裂纹延伸后传播的路径, 并与试验结果互相验证。

2 理论基础

2.1 异向性弹性理论

考虑一线弹性、均质与横向各向同性薄板, 定义总体坐标系统为卡式坐标(x-y), 区域坐标系统为 x'-y', 其中, x' 轴为垂直横向各向同性平面, y' 轴则是位于横向各向同性平面。层面倾角 ψ 定义为横向各向同性平面与 x' 轴间的夹角。假设平板很薄, 可忽略材料受力后厚度方向之应力变化, 故采用广义平面应力假设推导各向异性材料本构方程^[11]。在 x-y 坐标系统下的平面材料本构关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{26} \\ a_{61} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中: $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为在 x-y 坐标系统下计算的柔度分量, 这些分量与材料弹性参数有关。

通过坐标转换, 将这些分量转换成 x'-y' 坐标系统上弹性模量与层面倾角 ψ 的关系^[12], 即

$$a_{11} = \frac{\sin^4 \psi}{E'} + \frac{\cos^4 \psi}{E} + \sin^2 \psi \cos^2 \psi \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) \quad (2a)$$

$$a_{12} = \left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E} - \frac{1}{G'} \right) \sin^2 \psi \cos^2 \psi - \frac{\cos^4 \psi}{E'} \nu' - \frac{\sin^4 \psi}{E'} \nu' \quad (2b)$$

$$a_{16} = \left[2 \left(\frac{\cos^2 \psi}{E} - \frac{\sin^2 \psi}{E'} \right) + \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \right] (-\sin \psi \cos \psi) \quad (2c)$$

$$a_{22} = \frac{\cos^4 \psi}{E'} + \frac{\sin^4 \psi}{E} + \sin^2 \psi \cos^2 \psi \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) \quad (2d)$$

$$a_{26} = \left[2 \left(\frac{\sin^2 \psi}{E} - \frac{\cos^2 \psi}{E'} \right) - \left(\frac{1}{G'} - \frac{2\nu'}{E'} \right) (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi) \right] (-\sin \psi \cos \psi) \quad (2e)$$

$$a_{66} = \left(\frac{1}{E'} + \frac{1}{E} + \frac{2\nu'}{E'} \right) 4 \sin^2 \psi \cos^2 \psi + \frac{1}{G'} (\sin^2 \psi - \cos^2 \psi)^2 \quad (2f)$$

式中： E ， E' 分别为横向各向同性平面与垂直该平面的弹性模量； ν ， ν' 分别为横向各向同性平面作用力平行与垂直产生的侧向应变与轴向应变之比； G' 为横向各向同性平面垂直剪力模量，且有 $G' = E / (2(1 + \nu))$ 。

令 F 为应力函数，则应力分量可表示为

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3)$$

ε_x ， ε_y ， γ_{xy} 必须满足下列的微分方程式：

$$a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (4)$$

通解 $\mu_i (i=1 \sim 4)$ 为下述特征方程式的根：

$$a_{11} \mu^4 - 2a_{16} \mu^3 + (2a_{12} + a_{66}) \mu^2 - 2a_{26} \mu + a_{22} = 0 \quad (5)$$

应力函数 F 的一阶导数^[11]可用下列式子表示：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2 \operatorname{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式中： Re 定义为复数的实部， $\phi_k(z_k) (k=1, 2)$ 为复变数 $z_k = x + \mu_k y$ 的解析函数。

联立式(3)与(6)，可获得应力分量的通用式：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2 \operatorname{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2 \operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中： $\phi_k'(z_k)$ 为 $\phi_k(z_k)$ 对 z_k 的一阶导数。将式(7)代入本构关系与协调方程，可获得 x 与 y 方向的位移分量^[13]，即

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 \operatorname{Re}[P_{11} \phi_1(z_1) + P_{12} \phi_2(z_2)] \\ v &= 2 \operatorname{Re}[P_{21} \phi_1(z_1) + P_{22} \phi_2(z_2)] \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

其中，

$$\left. \begin{aligned} P_{1k} &= a_{11} \mu_k^2 + a_{21} - a_{16} \mu_k \\ P_{2k} &= a_{12} \mu_k + a_{22} / \mu_k - a_{26} \quad (k=1, 2) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(7)，(8)分别为横向各向同性薄板的应力场与位移场。

2.2 边界积分方程

对一个具有裂纹的弹性物体，传统的线弹性位移边界积分方程式并不足以解出所有外部边界及裂纹面两边的未知数，是因为裂纹面具有几何形状的奇异性。在 C. C. Ke 等^[14]的边界元法公式中，对于具有裂纹的各向异性材料，位移积分方程式仅使用于外部边界，而拉力积分方程式只能使用在裂纹的单边。位移积分方程式应用在外边界的结果(二维裂纹的几何形状见图 2)如下所示 ($z_{k, B}^0 \in \Gamma_B$)：

$$\begin{aligned} &C_{ij}(z_{k, B}^0) u_j(z_{k, B}^0) + \int_{\Gamma_B} T_{ij}(z_k, B, z_{k, B}^0) u_j(z_k, B) \cdot \\ &d\Gamma(z_k, B) + \int_{\Gamma_C} T_{ij}(z_k, C, z_{k, B}^0) [u_j(z_k, C) - \\ &u_j(z_k, C-)] d\Gamma(z_k, C) = \int_{\Gamma_B} U_{ij}(z_k, B, z_{k, B}^0) \cdot \end{aligned}$$

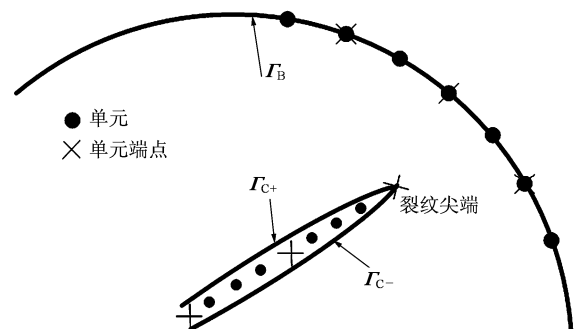


图 2 二维裂纹的几何形状

Fig.2 Geometry of a two-dimensional cracked domain

$$t_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) \quad (10)$$

式中: 下标“B”, “C” 分别代表外部边界及裂纹面边界; C_{ij} 为与边界几何特征有关的系数, 若为平滑边界, 该系数为 $\delta_{ij}/2$; T_{ij} 为拉力的核函数; u_j 为位移; $z_{k,B}$ 为在边界上的场地点; $z_{k,B}^0$ 为在边界上的源点; t_j 为拉力; $z_{k,C}$ 为在裂纹面单边的场地点。

Γ_C, Γ_{C+} 均为具有相同方向的向外法线向量。在裂纹面的单边 ($z_{k,C}^0 \in \Gamma_{C+}$) 拉力积分方程式应用如下:

$$0.5t_j(z_{k,C}^0) + n_m(z_{k,C}^0) \int_{\Gamma_B} C_{lmik} T_{ij,k}(z_{k,C}^0, z_{k,B}) \cdot u_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) + n_m(z_{k,C}^0) \cdot \int_{\Gamma_C} C_{lmik} T_{ij,k}(z_{k,C}^0, z_{k,C}) [u_j(z_{k,C+}) - u_j(z_{k,C-})]d\Gamma(z_{k,C}) = n_m(z_{k,C}^0) \cdot \int_{\Gamma_B} C_{lmik} U_{ij,k}(z_{k,C}^0, z_{k,B}) t_j(z_{k,B})d\Gamma(z_{k,B}) \quad (11)$$

式中: C_{lmik} 为 4 阶刚度张量, $z_{k,C}^0$ 为在裂纹面单边的源点, n_m 为边界上的向外法向量, $U_{ij,k}$ 为位移核函数在 k 方向的导数。

利用式(10)及(11)可解出在外围边界上的未知位移及拉力, 而且在裂纹面上未知的裂纹相对位移亦可求出。

2.3 应力强度因子计算

针对混合模式加载下, 裂纹尖端的应力强度因子, 可藉裂纹的相对位移(RCD)以外插法求出, 即

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^3 \varphi_k \Delta u_i^k \quad (12)$$

在距离裂纹尖端 r 时, 其裂纹尖端的相对位移 ($\Delta u_1, \Delta u_2$) 与各向同性与各向异性的应力强度因子 (K_I, K_{II}) 之关系^[15]为

$$\left. \begin{aligned} \Delta u_1 &= 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (H_{11}K_I + H_{12}K_{II}) \\ \Delta u_2 &= 2\sqrt{\frac{2r}{\pi}} (H_{21}K_I + H_{22}K_{II}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中: H_{ij} ($i, j=1, 2$) 为与材料弹性参数有关的系数^[16]。

由边界元法所求得的裂纹相对位移代入式(12)及(13), 可得到一组代数方程式, 经由此方程式可求出 K_I 及 K_{II} 。利用裂纹尖端的相对位移量, 可求出该示意图的应力强度因子。在本文中定义正规化

应力强度因子:

$$\left. \begin{aligned} F_I &= \frac{K_I}{K_0}, F_{II} = \frac{K_{II}}{K_0} \\ K_0 &= \frac{W}{\pi R t} \sqrt{\pi a} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

2.4 裂纹初始开裂角度与传播路径

在断裂力学的领域中, 一般常用来预测裂纹初始成长角度的断裂准则有以下 3 种: (1) 最大拉应力断裂准则 (σ - 断裂准则)^[17]; (2) 最大能量释放率断裂准则 (G - 断裂准则); (3) 最小应变能密度断裂准则 (S - 断裂准则)。

在以上 3 种断裂准则中, σ - 断裂准则所预测的裂纹开裂初始方向与前人在脆性黏土^[18]与化学材料^[19, 20]的试验结果较为接近, 故本文将此断裂准则, 运用混合模式加载下, 量测各向异性岩石的裂纹开裂初始角度。对于各向异性材料, 一般在裂纹尖端附近的弹性应力场, 在局部卡式坐标 (x'', y'') 如图 3 所示。

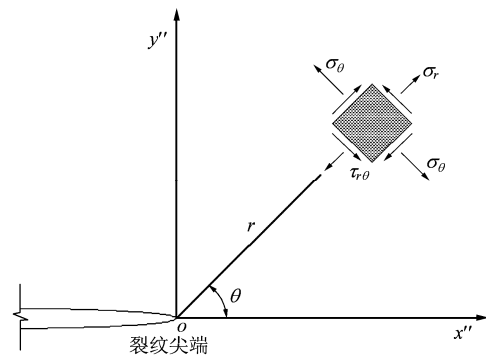


图 3 裂纹尖端之区域坐标系统

Fig.3 Crack tip coordinate system and stress components

应力场可以用应力强度因子 K_I, K_{II} 来表示, 即

$$\sigma_x'' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re} \cdot \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \text{Re} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (15)$$

$$\sigma_y'' = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (16)$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \cdot \left[\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \cdot \left[\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (17)$$

式中： r 为与裂纹尖端的距离。

利用转换(如图 4 所示)，在极坐标下裂纹尖端附近的应力场可表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\sigma_x'' + \sigma_y''}{2} - \frac{\sigma_x'' - \sigma_y''}{2} \cos(2\theta) - \tau_{x'y'} \sin(2\theta) \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\sigma_x'' - \sigma_y''}{2} \sin(2\theta) + \tau_{x'y'} \cos(2\theta) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

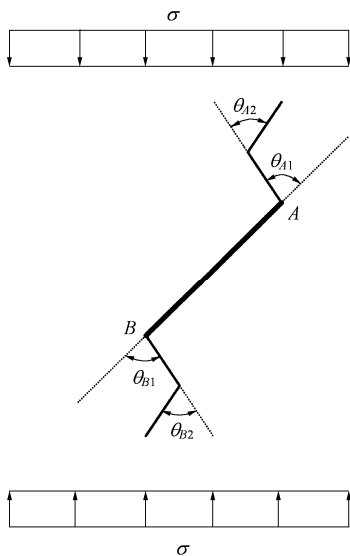


图 4 裂纹传播的过程

Fig.4 Process of crack propagation

假如使用最大拉应力断裂准则，则裂纹开裂初始角度(θ_0)必须满足下式：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} &= 0 \quad (\text{或 } \tau_{r\theta} = 0) \\ \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} &< 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

当材料弹性参数、材料异向程度系数(ψ)及裂纹几何性质均为已知值，且 σ_θ 为最大值时，可应用一数值计算过程找出裂纹开裂初始开裂角度(θ_0)。

在本文中，对于在混合模式加载下，具有裂纹的各向异性岩石圆盘，其裂纹传播的模拟过程为在裂纹尖端处延伸一小段离散的线性元素，并计算该延伸元素尖端的应力场及位移场，以求出新延伸元素的应力强度因子及开裂的初始角度。重复以上的步骤，直到裂纹延伸至边界为止，其模拟裂纹传播详细的步骤如下：

- (1) 利用本文提出的边界元法，计算裂纹尖端处的应力强度因子。依据最大周围应力断裂准则，量测裂纹初始角度。
- (2) 沿着由步骤(1)所量测出的方向，在裂纹处延伸一段线性元素。
- (3) 经由程序自动产生新的边界元法网格。
- (4) 重复上述 4 个步骤进行计算，直到新的裂纹延伸至外部边界附近为止。

3 数值分析

3.1 应力强度因子计算验证

本文主要分析的对象为一半径为 R 、厚度为 t 且中心有一裂纹长为 $2a$ 的薄形圆盘，承受集中荷载 W ，如图 5 所示。其分析过程中，最外围的边界及

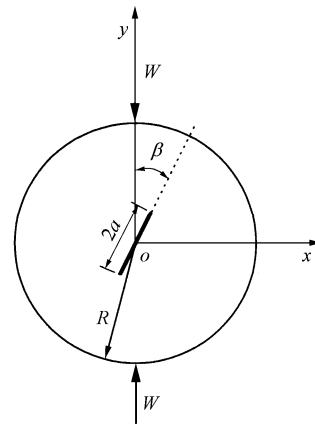


图 5 各向同性巴西试验圆盘

Fig.5 Isotropic cracked Brazilian disc test

裂纹表面的边界分别用 28 个连续及 10 个不连续元素来仿真, 并采用平面应力假设与忽略其体力。

为比较本文的边界元法分析程序的适用性, 本文针对各向同性及各向异性材料进行分析, 并与前人所作结果进行比较, 算例 1, 2 分别对应各向同性与各向异性材料。

3.1.1 算例 1(各向同性材料)

针对各向同性材料, 如图 5 所示中心具有裂纹之圆形试体承受径向荷载, 在无因次裂纹长度 $a/R=0.5$ 情况下, 探讨裂纹倾角(β)对应力强度因子的影响, 并与以连续分布扰动定理求得解析解^[21]及以边界元法结合 J-积分技术计算的数值解^[22]加以比较, 结果如表 1 所示, 发现本文所提的边界元法结果与其所得之应力强度因子相当接近, 因此本程序可适用于分析各向同性材料。

3.1.2 算例 2(各向异性材料)

以一长宽各为 $2h$ 及 $2w$ 且中心有一裂纹长为 $2a$ 的各向异性矩形薄版, 承受均布拉力 σ 为分析对象, 如图 6 所示, 其中, $a/w=0.2$ 及 $h/w=2.0$, 本文针对不同的材料各向异性层面 ψ 对应力强度因子的影响进行分析, 其过程与各向同性之过程相同。分析对象的几何形式及基本假设为:

- (1) 裂纹倾角 ($\beta = 45^\circ$);
- (2) 裂纹长度 ($a = 0.5$);
- (3) 平面应力并忽略其体力;
- (4) 弹性参数: $E = 48.26 \text{ GPa}$, $E' = 17.24 \text{ GPa}$, $\nu' = 0.29$, $G' = 6.89 \text{ GPa}$ 。

由表 2 ($\beta = 45^\circ$, $a/R = 0.5$) 可发现, 本文提出的边界元法分析程序与前人分析结果较为接近, 故本程序可应用于分析各向异性材料。

3.2 裂纹初始开裂角度与传播路径的仿真分析

(1) 裂纹开裂初始角度

为验证本文所提出的边界元法仿真程序, 用于裂纹开裂初始角度的模拟分析时的适用性, 根据前人试验条件模拟并与其试验结果进行比较分析, 其过程如下所述:

F. Erdogan 和 G. C. Sih^[17]以各向同性的树脂玻璃为试验材料来进行单轴拉伸试验, 其试体尺寸为 $229 \text{ mm} \times 457 \text{ mm} \times 4.8 \text{ mm}$ (长 \times 宽 \times 厚) 的薄板, 试体中心有一 50.8 mm 长的裂纹。考虑各种不同裂纹倾角 β 下裂纹开裂初始角度变化, 图 7 为树脂玻璃承受单轴拉伸荷载下, 裂纹倾角 θ_0 与初始开裂角度 β 的变化关系。由图 7 可知, 数值模拟结果与试验结果相当吻合。

L. E. Vallejo^[18]以高岭土作为试验材料来进行单轴抗压试验, 其岩样尺寸为 $76.2 \text{ mm} \times 76.2 \text{ mm} \times 25.4 \text{ mm}$ (长 \times 宽 \times 高), 其中心具有一条 24.9 mm 长的裂纹, 同时, 也针对各种不同裂纹倾角来进行试验。图 8 为高岭土承受单轴压缩荷载下, 裂纹倾角 θ_0 与初始开裂角度 β 的变化关系。由图 8 可知, 试验结果和本文数值分析结果也较为吻合。

(2) 传播路径

针对前人在各向同性与各向异性材料的试验结果进行探讨, 并观察其实际裂纹传播路径, 用以验证本程序的仿真结果。

首先为 M. A. Pustejovsky^[24]进行一系列的单轴拉伸试验来探讨各向同性钛薄版的裂纹问题, 其试体的材料弹性参数为 $E = 112 \text{ GPa}$, $\nu = 0.29$, 极限张力强度为 $T_u = 945 \text{ MPa}$, 试体尺寸为 $203.2 \text{ mm} \times$

表 1 正规化应力强度因子与半径比的关系(承受径向荷载的各向同性巴西圆盘, $\beta = 45^\circ$)
Table 1 Normalized SIFs of the isotropic cracked Brazilian disc with radical loading($\beta = 45^\circ$)

a/R	C. Atkinson 等 ^[21] 结果		C. S. Chen 等 ^[22] 结果		本文结果	
	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$
0.1	-1.035	-2.010	-1.020	-1.968	-1.018	-1.965
0.2	-1.139	-2.035	-1.116	-1.995	-1.116	-1.992
0.3	-1.306	-2.069	-1.272	-2.036	-1.277	-2.029
0.4	-1.528	-2.100	-1.484	-2.069	-1.492	-2.065
0.5	-1.784	-2.132	-1.737	-2.103	-1.749	-2.098
0.6	-2.048	-2.200	-2.020	-2.148	-2.039	-2.139
0.7	-	-	-2.337	-2.213	-2.364	-2.224

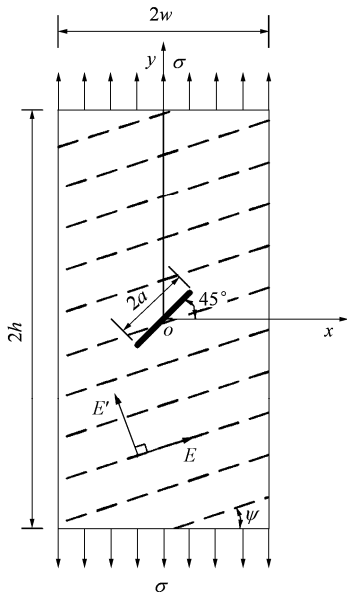


图 6 各向异性矩形试体

Fig.6 Anisotropic rectangular plate with an inclined crack under uniform tensile stress

76.2 mm×3.2 mm(长×宽×厚)且中心具有一条 13.5 mm 长裂纹。本文以一裂纹倾角 $\beta = 43^\circ$ 的岩样作为仿真分析比较的对象, 其分析过程是采用 32 个连续与 10 个不连续二次元素来模拟岩样外部边界与裂纹表面, 其数值模拟结果如图 9 所示。

由图 9 可知, 当传播路径越靠近边界时, 有越垂直于荷载方向的趋势, 这个结果与双边界元法仿真的结果^[25]有相同趋势。由图 10 可以发现, 本文数

值模拟结果与 M. A. Pustejovsky^[24]试验结果相当吻合, 表示本文所提出程序可模拟各向同性材料裂纹传播路径。

但由于以上试验结果均只是针对各向同性材料进行探讨, 为验证本程序模拟各向异性材料裂纹传播路径的适用性, 本文以台湾花莲地区大理岩进行巴西试验所得的结果来进行比较。

以大理岩作为制作各向异性巴西试验圆盘(CSTBD)材料, 试体直径约为 $\phi 7.4$ cm, 厚度约为 1 cm 且中心具有一长 2.2 cm 的裂纹, 各向异性大理岩 5 个材料弹性参数分别为 $E = 78.302$ GPa, $E' = 67.681$ GPa, $\nu = 0.267$, $\nu' = 0.185$, $G = 30.735$ GPa 和 $G' = 25.336$ GPa。本文是以各向异性层面倾角 $\psi = 45^\circ$, 其中 2 组岩样 B - 1 及 B - 2 的几何特征来仿真其传播路径并与其试验结果比较, 2 组岩样的裂纹倾角分别为 $\beta = 0^\circ$ 与 $\psi = 30^\circ$, 如图 11 所示。

由图 11 的试验结果可观察到, 所有岩样裂纹传播的方向均平行于荷载作用方向且很接近荷载作用点。接着, 本文采用边界元法来分析, 分别于圆盘外部边界及裂纹表面设定 32 个连续及 30 个不连续元素来模拟, 图 11(b)和 12(b)分别为 B - 1 及 B - 2 之数值模拟与试验结果, 结果发现, 2 种方法的传播路径相当吻合。因此, 本文所提出的边界元法仿真程序可同时适用于分析各向同性与各向异性材料的裂纹初始角度与传播路径。

表 2 正规化应力强度因子与各向异性层面倾角的关系(承受均布荷载的各向异性矩形试体)

Table 2 Normalized SIFs for a central crack inclined 45° in anisotropic rectangular plate subjected to a uniform tensile stress

ψ /($^\circ$)	K. R. Gandhi ^[23] 结果		E. Pan ^[16] 结果		C. S. Chen 等 ^[22] 结果		本文结果	
	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_I / (\sigma\sqrt{\pi a})$	$K_{II} / (\sigma\sqrt{\pi a})$
0	0.522	0.507	0.522 8	0.507 6	0.519	0.504	0.524	0.514
45	0.515	0.505	0.515 3	0.504 8	0.516	0.505	0.518	0.513
90	0.513	0.509	0.513 3	0.509 0	0.537	0.532	0.533	0.527
105	0.517	0.510	0.516 5	0.510 7	0.507	0.502	0.540	0.528
120	0.524	0.512	0.524 0	0.511 7	0.520	0.508	0.541	0.526
135	0.532	0.511	0.531 6	0.511 1	0.532	0.511	0.536	0.522
180	0.522	0.507	0.522 8	0.507 6	0.519	0.504	0.524	0.514

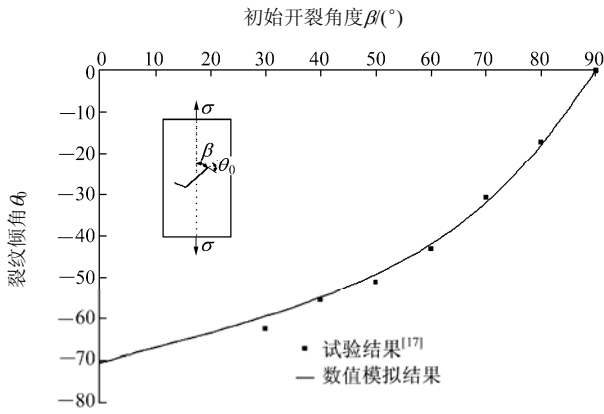


图 7 树脂玻璃承受单轴拉伸荷载下, 裂纹倾角 θ_0 与初始开裂角度 β 的变化关系

Fig.7 Variations of crack initiation angle θ_0 with the crack angle β plexiglass plate subjected to uniaxial tension

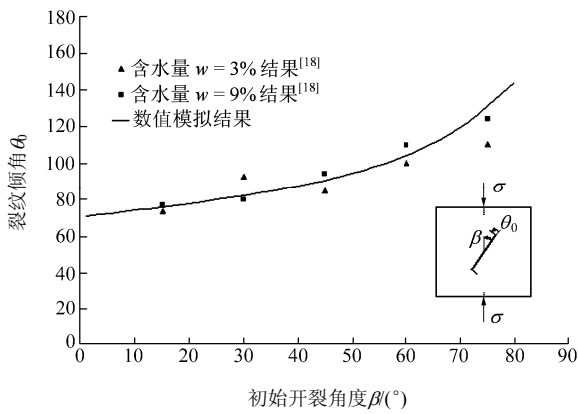


图 8 高岭土承受单轴压缩荷载下, 裂纹倾角 θ_0 与初始开裂角度 β 的变化关系

Fig.8 Variation of crack initiation angle θ_0 with the crack angle β Prismatic sample of kaolinite clay subjected to uniaxial compression

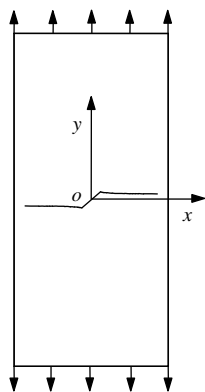


图 9 钛薄版承受单轴拉伸荷载下裂纹传播路径的仿真分析 ($\beta = 43^\circ$)

Fig.9 Numerical simulation of crack propagation of titanium plate subjected uniaxial tension ($\beta = 43^\circ$)

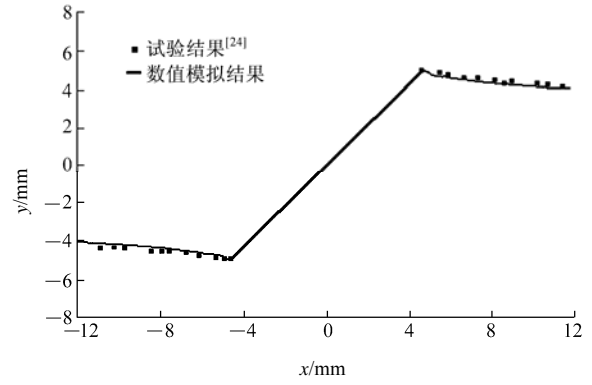
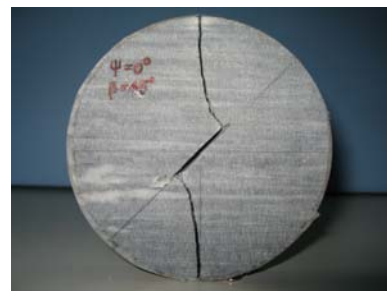
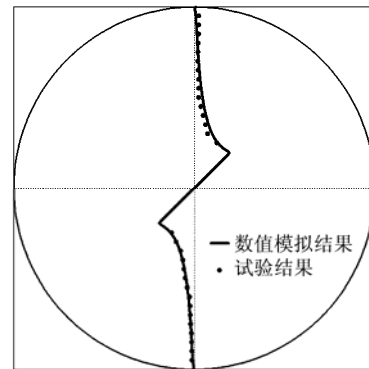


图 10 钛薄版中心裂纹尖端附近试验观测值与数值模拟结果比较

Fig.10 Comparison of simulated crack propagation with experimental observation of titanium plate near crack end



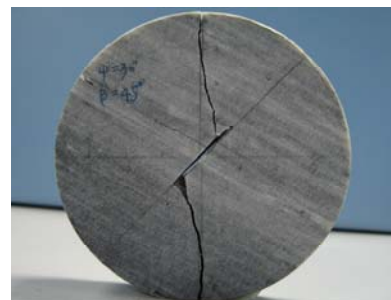
(a) 断裂后照片



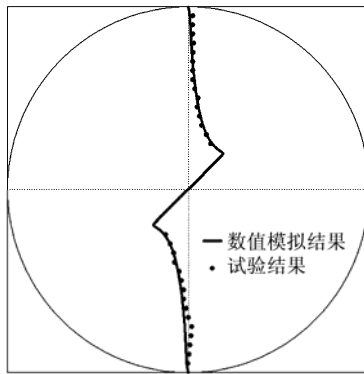
(b) 试验结果与数值模拟结果比较

图 11 大理岩圆盘试样 B - 1 断裂后中心裂纹的传播路径 ($\psi = 0^\circ, \beta = 45^\circ$)

Fig.11 Propagation of a crack at the center of a CSTBD specimen with $\psi = 0^\circ$ and $\beta = 45^\circ$ for marble sample B - 1



(a) 断裂后照片



(b) 试验结果与数值模拟结果比较

图 12 大理岩圆盘试样 B-2 断裂后中心裂纹的传播路径($\psi = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$)Fig.12 Propagation of a crack at the center of a CSTBD specimen with $\psi = 30^\circ$ and $\beta = 45^\circ$ for marble sample B-2

4 结 论

本文提出一套可针对各向异性材料进行断裂力学分析方法, 包含应力强度因子分析、裂纹初始开裂角度预测与裂纹传播路径仿真。透过实例验证与试验结果比较, 可提出下列几点结论:

(1) 提出了边界元法仿真程序并结合最大拉应力断裂准则, 可顺利地预测出各向异性岩石在混合模式加载下, 裂纹初始开裂角度与裂纹传播的路径, 且与前人针对各向同性材料进行的试验结果较为吻合。

(2) 提出利用巴西试验圆盘试体(CSTBD)进行试验, 由试验结果发现, 裂纹传播的路径会沿着荷载方向延伸至荷载点。利用本文提出的边界元素分析模式也可仿真出相同趋势的路径, 且两者间的结果较为吻合。因此, 本文提出的数值分析结合试验方法可有系统性地量测并可阐述裂纹尖端的断裂力学特征。

参考文献(References):

- [1] GRIFFITH A A. The theory of rupture[C]// Proceedings of the 1st International Congress of Applied Mechanics. [S.l.]: [s.n.], 1924: 55 - 63.
- [2] IRWIN G R. Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate[J]. Journal of Applied Mechanics, 1957, 24(3): 361 - 364.
- [3] SNYDER M D, CRUSE T A. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates[J]. International Journal of Fracture, 1975, 11(2): 315 - 328.
- [4] BLANDFORD G E, INGRAFFEA A R, LIGGETT J A. Two-dimensional stress intensity factor computations using the boundary element method[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1981, 17(3): 387 - 404.
- [5] SOLLERO P, ALIABADI M H, ROOKE D P. Anisotropic analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element method[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 49(2): 213 - 224.
- [6] SOLLERO P, ALIABADI M H. Anisotropic analysis of cracks in composite laminates using the dual boundary element method[J]. Composite Structures, 1995, 31(3): 229 - 233.
- [7] CROUCH S L, STARFIELD A M. Boundary element methods in solid mechanics[M]. London: George Allen and Unwin Publishers, 1983.
- [8] SHEN B, STEPHANSSON O. Modification the G-criterion for crack propagation subjected to compression[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1994, 47(2): 177 - 189.
- [9] SCAVIA C. A method for the study of crack propagation in rock structures[J]. Geotechnique, 1995, 45(3): 447 - 463.
- [10] PORTELA A, ALIABADI M H, ROOKE D P. Dual boundary element incremental analysis of crack growth[J]. Composite Structures, 1993, 46(2): 237 - 284.
- [11] LEKHNITSKII S G. Theory of elasticity of an anisotropic elastic body[M]. San Francisco: Holden-Day Inc., 1963.
- [12] AMADEI B. Rock anisotropy and the theory of stress measurements[M]. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [13] SIH G C, PARIS P C, IRWIN G R. On cracks in rectilinearly anisotropic bodies[J]. International Journal of Fracture, 1965, 1(3): 189 - 203.
- [14] KE C C, CHEN C S, TU C H. Determination of fracture toughness of anisotropic rocks by boundary element method[J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 2008, 41(4): 509 - 538.
- [15] SOLLERO P, ALIABADI M H. Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method[J]. International Journal of Fracture, 1993, 64(4): 269 - 284.
- [16] PAN E. A general boundary element analysis of 2D linear elastic fracture mechanics[J]. International Journal of Fracture, 1997, 88(1): 41 - 59.
- [17] ERDOGAN F, SIH G C. On the crack extension in plates under loading and transverse shear[J]. Journal of Basic Engineering, 1963, 85(4): 519 - 527.
- [18] VALLEJO L E. The brittle and ductile behavior of a material containing a crack under mixed-mode loading[C]// Proceedings of the 28th U. S. Symposium on Rock Mechanics. Tucson: University of Arizona, 1987.
- [19] WOO C W, LING L H. On angled crack initiation under biaxial loading[J]. Journal of Strain Analysis, 1984, 19(1): 51 - 59.
- [20] RICHARD H A. Examination of brittle fracture criteria for overlapping mode I and mode II loading applied to cracks[C]// Application of Fracture Mechanics to Materials and Structures. [S.l.]: Martinus Nijhoff Publication, 1984: 309 - 316.
- [21] ATKINSON C, SMELSER R E, SANCHEZ J. Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test[J]. International Journal of Fracture, 1982, 18(4): 279 - 291.
- [22] CHEN C S, PAN E, AMADEI B. Fracture mechanics analysis of cracked discs of anisotropic rock using the boundary element method[J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, 1998, 35(2): 195 - 218.
- [23] GANDHI K R. Analysis of inclined crack centrally placed in an orthotropic rectangular plate[J]. Journal of Strain Analysis, 1972, 7(3): 157 - 162.
- [24] PUSTEJOVSKY M A. Fatigue crack propagation in titanium under general in-plane loading—I: experiments[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1979, 11(1): 9 - 15.
- [25] YAN A M, NGUYEN-DANG H. Multiple cracked fatigue crack growth by BEM[J]. Computational Mechanics, 1995, 16(5): 273 - 280.